4

Classificazione delle isometrie del piano e dello spazio

In questo capitolo daremo una classificazione completa di tutte le isometrie (trasformazioni euclidee) del piano e dello spazio. Sia $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ una trasformazione euclidea da uno spazio euclideo in se stesso. Fissato un riferimento, cartesiano abbiamo visto nel paragrafo 2.2.4 che la trasformazione euclidea si scrive, in coordinate, come

$$X' = MX + \beta$$

dove $M = (m_{ij})$ rappresenta una matrice ortogonale e β un vettore colonna. In più la trasformazione euclidea induce una trasformazione ortogonale

$$f : V \to V,$$

dove V indica la giacitura di $\mathcal{E}$.
Per comprendere le trasformazioni euclidee iniziamo dando la classificazione delle trasformazioni ortogonali.

4.1 Trasformazioni ortogonali di uno spazio di dimensione 2

Sia V_2 lo spazio vettoriale dei vettori liberi del piano e sia $f : V_2 \to V_2$ una trasformazione ortogonale, cioè tale che $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, per ogni $v, w \in V_2$. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ la base canonica orientata positivamente di V_2 ed andiamo a determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$. Si hanno le seguenti possibilità:

- la base $\{f(\mathbf{i}), f(\mathbf{j})\}$ è orientata positivamente (si veda la Figura 4.1 (a));
- la base $\{f(\mathbf{i}), f(\mathbf{j})\}$ è orientata negativamente (si veda la Figura 4.1 (b)).

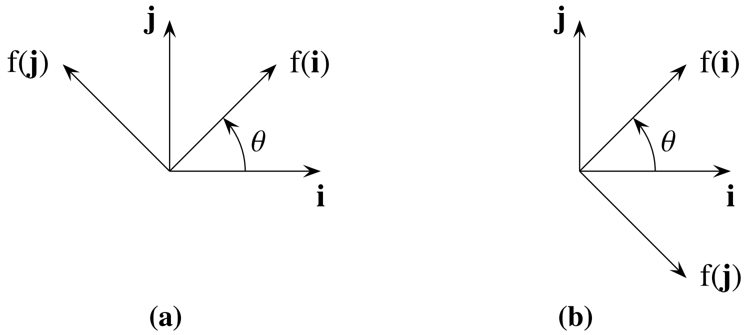


Figura 4.1 – La base $\{f(\mathbf{i}), f(\mathbf{j})\}$.

Nel primo caso, chiamato con θ l'angolo tra $\mathbf{i}$ e $f(\mathbf{i})$, si ha:

$$f(\mathbf{i}) = \langle f(\mathbf{i}), \mathbf{i}\rangle\, \mathbf{i} + \langle f(\mathbf{i}), \mathbf{j}\rangle\, \mathbf{j} = \cos\theta\, \mathbf{i} + \cos(\pi/2 - \theta)\, \mathbf{j} = \cos\theta\, \mathbf{i} + \sin\theta\, \mathbf{j},$$

mentre

$$f(\mathbf{j}) = \langle f(\mathbf{j}), \mathbf{i}\rangle\, \mathbf{i} + \langle f(\mathbf{j}), \mathbf{j}\rangle\, \mathbf{j} = \cos(\pi/2 + \theta)\, \mathbf{i} + \cos(\theta)\, \mathbf{j} = -\sin\theta\, \mathbf{i} + \cos\theta\, \mathbf{j}.$$

Segue che la matrice associata ad una trasformazione ortogonale che conserva l'orientazione della base è

$$M^+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Nel secondo caso, cioè quando l'orientazione non è conservata, un calcolo diretto (si utilizzi la Figura 4.1 (b)) mostra che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{i}) &= \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \\ f(\mathbf{j}) &= \sin\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j} \end{aligned}.$$

Segue che la matrice associata ad una trasformazione ortogonale che non conserva l'orientazione della base è

$$M^- = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Osservazione 4.1. Si osservi che $\det(M^+) = 1$ mentre $\det(M^-) = -1$. Tale risultato non è sorprendente visto che, dalla regola di Binet, il determinante di una matrice ortogonale è sempre uguale a ± 1.

Le matrici ortogonali con determinante uguale a 1 formano un sottogruppo del gruppo ortogonale, chiamato gruppo **ortogonale speciale** e denotato con $\mathrm{SO}(n)$. Lasciamo per esercizio la verifica che formano un sottogruppo. Diversamente le matrici ortogonali con determinante uguale a -1 non formano un sottogruppo, basti pensare che il prodotto di due matrici con determinante negativo ha determinante positivo.

Definizione 4.2. Un vettore $u \in V_2$ si dice **invariante** per f se $f(u) = u$.

Sia adesso U l'insieme dei vettori invarianti. È facile verificare che U definisce un sottospazio vettoriale di V_2 (U è l'autospazio corrispondente all'autovalore 1).
Sia adesso f una trasformazione ortogonale la cui matrice associata sia M^+. Se $\theta \neq 0$, cioè se $f \neq \mathrm{Id}$, un calcolo diretto mostra che lo spazio $U = \{0\}$. Infatti, l'equazione caratteristica diventa, in questo caso,

$$\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono reali se e solo se $\theta = 0$. Quindi non esiste l'autovalore 1. Per comprendere la geometria della trasformazione f con matrice associata M^+ calcoliamo l'angolo tra v e $f(v)$. Se $v = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, si ha

$$\begin{aligned} \cos\widehat{vf(v)} &= \frac{\langle v, f(v)\rangle}{\|v\|^2} = \frac{\langle v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}, (v_1\cos\theta - v_2\sin\theta)\mathbf{i} + (v_1\sin\theta + v_2\cos\theta)\mathbf{j}\rangle}{\|v\|^2} \\ &= \frac{\|v\|^2\cos\theta}{\|v\|^2} = \cos\theta. \end{aligned}$$

Segue che la trasformazione f ruota il vettore v di un angolo θ. Si osservi che la rotazione avviene, in questo caso, in senso antiorario. Se si cambia θ con $-\theta$ la matrice M^+ diventa

$$M^+ = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

che rappresenta una rotazione in senso orario.

Vediamo adesso il caso delle trasformazioni ortogonali con matrice associata M^-. In questo caso il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1$. L'autospazio corrispondente all'autovalore 1 è il sottospazio U dei vettori invarianti. Un calcolo diretto mostra che una base di U è data dal vettore $u = \cos\theta/2\,\mathbf{i} + \sin\theta/2\,\mathbf{j}$. Sia adesso v un versore dell'autospazio relativo all'autovalore -1. Si osservi che, essendo la matrice M^- simmetrica, $v \perp u$ (qui stiamo utilizzando il fatto che autospazi relativi ad autovalori diversi di una matrice simmetrica sono perpendicolari, la dimostrazione è lasciata per esercizio). I vettori $\{u, v\}$ formano una nuova base orto-normale di V_2 (si veda la Figura 4.2 (a)). Se adesso scriviamo la matrice associata ad f rispetto alla base $\{u, v\}$ si trova

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sia adesso $w = w_1 u + w_2 v$ un altro vettore di V_2, si trova $f(w) = w_1 u - w_2 v$ da cui segue immediatamente che $f(w)$ è il simmetrico ortogonale di w rispetto ad u (si veda la Figura 4.2 (b)).

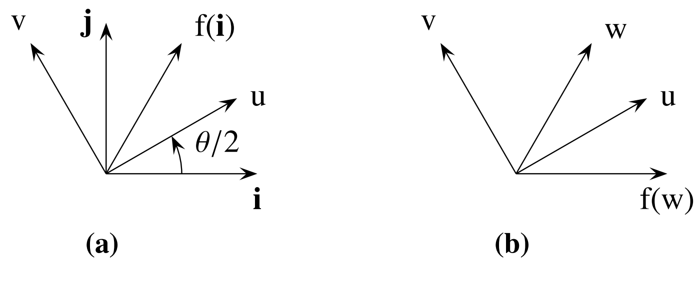


Figura 4.2 – La base $\{u, v\}$.

Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema 4.3. *Sia f una trasformazione ortogonale di V_2. Allora f è una delle seguenti:*

(a) la trasformazione identica;

(b) una rotazione di un angolo θ la cui matrice associata rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ è:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};$$

(c) una simmetria ortogonale rispetto ad un vettore $u \in V_2$ con $f(u) = u$, la cui matrice associata rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ è:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix};$$

mentre la matrice associata rispetto alla base $\{u, v\}$ con $v \perp u$ ($\|u\| = \|v\| = 1$) è:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Classificazione delle isometrie del piano

Sia $\mathcal{E}^2$ il piano euclideo. Rispetto ad un riferimento cartesiano $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ un'isometria $\varphi : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ si scrive, in coordinate, come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

dove la matrice $M = (m_{ij})$ è una matrice ortogonale mentre $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ è un vettore del piano.

Chiamiamo **movimento diretto** del piano un'isometria la cui matrice ortogonale associata ha determinante uguale a 1.

Un punto del piano P si dice **fisso**, rispetto all'isometria φ, se $\varphi(P) = P$.

Dal Teorema 4.3 ci sono tre tipi di isometrie.

Traslazioni

Se $M = I$ l'isometria è una **traslazione** in direzione del vettore $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ed è un movimento diretto (si veda la Figura 4.3 (a)). In questo caso la (4.1) diventa

$$\begin{cases} x' = x + \beta_1 \\ y' = y + \beta_2. \end{cases}$$

o, in forma matriciale,

$$P' = T_\beta(P),$$

dove con $T_\beta : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ indichiamo la traslazione in direzione β. È facile verificare che una traslazione non ha punti fissi tranne nel caso in cui $\beta = 0$ e l'isometria diventa l'applicazione identità.

Rotazioni

Supponiamo che la matrice M sia

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

con $\theta \neq 0$. La (4.1) diventa

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + \beta_1 \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + \beta_2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Cerchiamo i punti fissi. Questi sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} x = x\cos\theta - y\sin\theta + \beta_1 \\ y = x\sin\theta + y\cos\theta + \beta_2, \end{cases}$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} (1-\cos\theta)x + \sin\theta\, y = \beta_1 \\ -\sin\theta\, x + (1-\cos\theta)\, y = \beta_2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Essendo il determinante della matrice dei coefficienti $2(1-\cos\theta)$ segue che per $\theta \neq 0$ esiste un'unica soluzione. Sia quindi $P_0 = (x_0, y_0)$ l'unico punto fisso. Dalla (4.3) si ottiene

$$\begin{cases} \beta_1 = (1-\cos\theta)x_0 + \sin\theta\, y_0 \\ \beta_2 = -\sin\theta\, x_0 + (1-\cos\theta)\, y_0. \end{cases}$$

Tenendo conto di queste ultime la (4.2) diventa, in forma matriciale,

$$P' = P_0 + R_\theta(P - P_0)$$

che rappresenta una rotazione di un angolo θ attorno al punto P_0 (si veda la Figura 4.3 (b)).
La rotazione attorno ad un punto P_0 si può scomporre come: una traslazione in direzione di $-P_0$, in modo che P_0 coincida con l'origine, seguita da una rotazione di un angolo θ attorno all'origine, seguita da una traslazione in direzione di P_0. In formula, indicata con $R_\theta^{P_0}$ la rotazione attorno ad un punto P_0, si ha

$$P' = R_\theta^{P_0}(P) = T_{P_0} \circ R_\theta \circ T_{-P_0}(P)$$

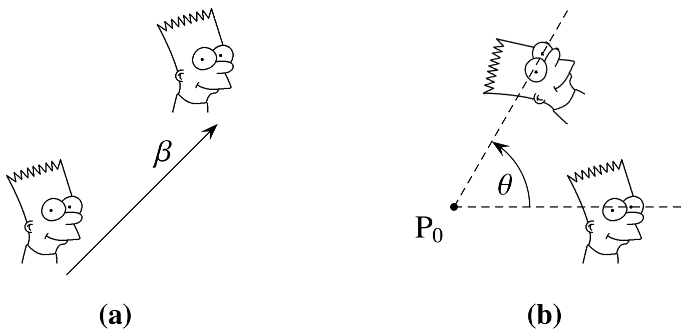


Figura 4.3 – Una traslazione (a). Una rotazione (b).

Simmetrie e glissosimmetrie

Supponiamo che la matrice ortogonale M corrisponda ad una simmetria ortogonale. In questo caso conviene fissare il riferimento cartesiano $(O, \{u, v\})$ dove O è un punto del piano, u è il versore invariante per M e v un versore perpendicolare ad u. Rispetto al riferimento $(O, \{u, v\})$ l'isometria (4.1) si scrive come

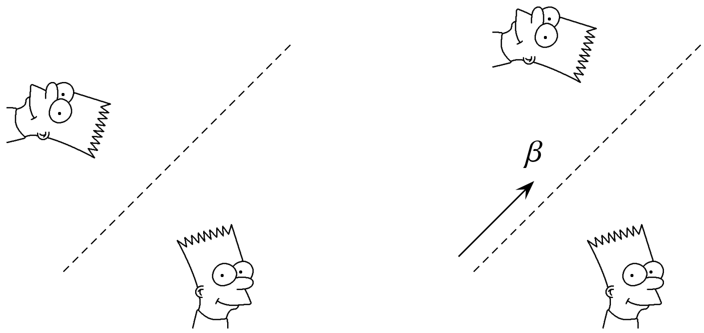
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} x' = x + \beta_1 \\ y' = -y + \beta_2. \end{cases}$$

L'immagine del punto di coordinate $(x, \beta_2/2)$ è $(x+\beta_1, \beta_2/2)$. Segue che i punti della retta r di equazione $y = \beta_2/2$ sono trasformati in punti della stessa retta. Si presentano due sottocasi.
Se $\beta_1 = 0$ tutti i punti della retta r sono fissi e l'isometria è una simmetria ortogonale rispetto alla retta r, Figura 4.4 (a).
Se $\beta_1 \neq 0$, nessun punto è fisso e l'isometria si può pensare come la composizione di una simmetria S, rispetto alla retta r, seguita da una traslazione T parallela alla retta stessa, si veda la Figura 4.4 (b). Tale isometria è chiamata **glissosimmetria**. In formula

$$(x, y) \overset{S}{\longmapsto} (x, -y + \beta_2) \overset{T}{\longmapsto} (x + \beta_1, -y + \beta_2)$$



(a) **(b)**

Figura 4.4 – Una simmetria (a). Una glissosimmetria (b).

Esempio 4.4. Da un punto di vista operativo se si vuole determinare la simmetria rispetto ad una retta r la cui equazione cartesiana, rispetto al sistema di riferimento cartesiano $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$, è $ax + by + c = 0$ si opera nel modo seguente. Si sceglie un punto $P_0 \in r$ e si applica la traslazione T_{-P_0} in modo che la retta passi per l'origine. Si cambiano le coordinate rispetto al riferimento $\{u, v\}$ dove u è un versore parallelo alla retta r mentre v un versore perpendicolare a u. Si opera la simmetria S_0. Si ricambiano le coordinate rispetto al riferimento originale $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ ed infine si trasla con T_{P_0}. I vettori u, v sono dati da

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-b, a) \\ v &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b). \end{aligned}$$

Segue che la matrice del cambiamento di base è

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

Se $P_0 = (x_0, y_0)$ allora la simmetria rispetto alla retta r è

$$P' = T_{P_0} \circ A \circ S_0 \circ A^T \circ T_{-P_0}(P)$$

che in coordinate diventa:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a^2(2x_0 - x) + 2ab(y_0 - y) + b^2 x}{a^2 + b^2} \\[2ex] y' = \dfrac{a^2 y + 2ab(x_0 - x) + b^2(2y_0 - y)}{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

4.3 Classificazione delle trasformazioni ortogonali in dimensione 3

Sia $f : V_3 \to V_3$ una trasformazione ortogonale. Classifichiamo f a seconda della dimensione dello spazio dei vettori invarinati

$$U = \{u \in V_3 \ : \ f(u) = u\}.$$

Il caso: $\dim(U) = 3$

In questo caso tutti i vettori sono invarianti e quindi la trasformazione è l'identità.

Il caso: $\dim(U) = 2$

Sia v un vettore perpendicolare a U. Dalla

$$\langle f(v), u\rangle = \langle f(v), f(u)\rangle = \langle v, u\rangle = 0, \quad \forall u \in U \tag{4.4}$$

segue che $f(v) \perp U$ da cui $f(v) = \lambda v$. Siccome gli autovalori di una trasformazione ortogonale[1] sono ± 1 segue che $f(v) = \pm v$. Di fatto non si può avere

[1] Se f è ortogonale e $f(v) = \lambda v$, $v \neq 0$, allora $\langle v, v\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle = \lambda^2\langle v, v\rangle$, da cui segue che $\lambda^2 = 1$.

$f(v) = v$, altrimenti la dimensione di U sarebbe 3. Si ha quindi $f(v) = -v$. Rispetto alla base $\{v, u_1, u_2\}$, dove $\{u_1, u_2\}$ è una base orto-normale di U, la matrice associata ad f diventa

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La trasformazione è una **simmetria ortogonale** rispetto a U.

Il caso: $\dim(U) = 1$

Sia $u \in U$ un versore e sia $V = u^\perp$. Dalla (4.4) segue che $f_{|V} : V \to V$ è una trasformazione ortogonale di uno spazio di dimensione 2. Quindi, dalla classificazione delle trasformazioni ortogonali in dimensione 2, $f_{|V}$ può essere: l'identità, una rotazione propria o una simmetria. Se $f_{|V}$ fosse l'identità o una simmetria ameterebbe vettori invarianti, così che la dimensione di U sarebbe maggiore di 1. Segue che $f_{|V}$ è una rotazione propria. La matrice associata ad f rispetto ad una base $\{u, v_1, v_2\}$, con $\{v_1, v_2\}$ base orto-normale di V, è

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

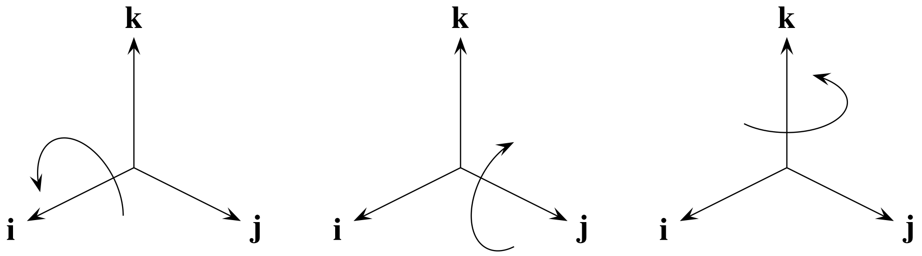
La trasformazione ortogonale rappresenta una **rotazione antioraria** di un angolo θ attorno alla direzione u invariante.

Osservazione 4.5. Fissata la base canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ le tre rotazioni antiorarie attorno ai vettori di base sono (si veda la Figura 4.5)

$$R^{\mathbf{i}}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R^{\mathbf{j}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R^{\mathbf{k}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il caso: $\dim(U) = 0$

In questo caso non esistono vettori invarianti. Il polinomio caratteristico associato alla trasformazione f è, rispetto ad una base qualsiasi, un polinomio di grado 3. Quindi esiste sempre una soluzione reale, cioè f ammette un autovalore reale. Siccome f non ha vettori invarianti diversi dal vettore nullo, segue



(a) $R_\theta^{\mathbf{i}}$ **(b)** $R_\theta^{\mathbf{j}}$ **(c)** $R_\theta^{\mathbf{k}}$

Figura 4.5 – Le tre rotazioni attorno ai vettori della base canonica.

che esiste un vettore v con $f(v) = -v$. Sia $W = v^\perp$. In modo analogo al caso precedente si dimostra che $f_{|W}$ è una rotazione propria. La matrice associata ad f, rispetto ad una base $\{v, w_1, w_2\}$, dove $\{w_1, w_2\}$ è una base orto-normale di W, diventa
$$SR_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

La trasformazione è quindi una simmetria ortogonale rispetto a W seguita da una rotazione attorno a v che chiamiamo **rotosimmetria**. Infatti si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4 Angoli di Eulero

Nel paragrafo precedente abbiamo descritto la matrice associata ad una trasformazione ortogonale in dimensione 3 rispetto ad una base orto-normale opportuna. Ci si chiede se si può descrivere una matrice ortogonale rispetto ad una qualsiasi base orto-normale. Una risposta positiva si può dare per il caso in cui il determinante della matrice sia 1, cioè nel caso in cui la trasformazione ortogonale rappresenti una rotazione. In questo caso è facile verificare che f manda la base canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ in una nuova base orto-normale $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ ancora definita positiva, nel senso che $\mathbf{i}' \wedge \mathbf{j}' = \mathbf{k}'$, si veda la Figura 4.6.

Per descrivere la trasformazione che porta la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ nella base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ introduciamo tre angoli noti col nome di **angoli di Eulero**. Sia $N = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k}'$. Gli angoli di Eulero sono così definiti:

- l'angolo ψ da $\mathbf{i}$ a N visto dal semispazio individuato da $\mathbf{k}$ si dice **angolo di precessione** ed è compreso tra 0 e 2π.
- l'angolo θ da $\mathbf{k}$ a $\mathbf{k}'$ visto dal semispazio individuato da N si dice **angolo di nutazione** ed è compreso tra 0 e π.
- l'angolo φ da N a $\mathbf{i}'$ visto dal semispazio individuato da $\mathbf{k}'$ si dice **angolo di rotazione propria** ed è compreso tra 0 e 2π.

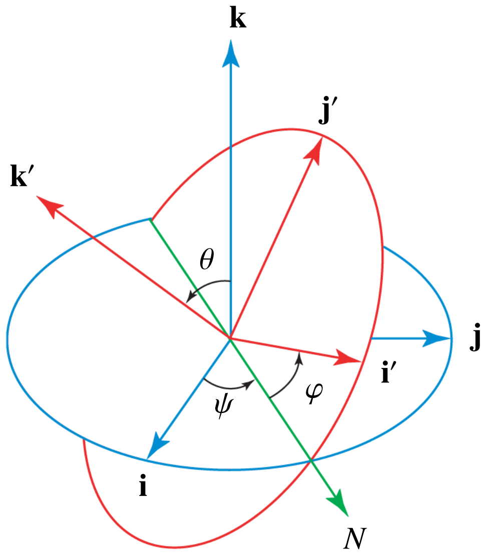


Figura 4.6 – Definizione degli angoli di Eulero.

La rotazione f si può realizzare attraverso tre rotazioni successive $R_\psi, R_\theta, R_\varphi$, così individuate:

- R_ψ è la rotazione di un angolo ψ attorno al vettore $\mathbf{k}$:

$$R_\psi^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  che manda la terna $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ nella terna $\{N, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}\}$.

- R_θ è la rotazione di un angolo θ attorno al vettore N:
$$R_\theta^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
che manda la terna $\{N, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}\}$ nella terna $\{N, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}'\}$.

- R_φ è la rotazione di un angolo φ attorno al vettore $\mathbf{k}'$:
$$R_\varphi^{\mathbf{k}'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
che manda la terna $\{N, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}'\}$ nella terna $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}_3, \mathbf{k}'\}$. Infine, essendo $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}_3, \mathbf{k}'\}$ una base positiva si deve avere $\mathbf{j}_3 = \mathbf{j}'$.

Quindi la matrice associata alla trasformazione ortogonale che manda la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ nella base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ è:

$$R_\varphi^{\mathbf{k}'} \circ R_\theta^N \circ R_\psi^{\mathbf{k}} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos(\theta)\sin\varphi\sin\psi & -\cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

che rappresenta una generica matrice ortogonale del terzo ordine con determinante 1.

4.5 Classificazione delle isometrie dello spazio

Sia $\mathcal{E}^3$ il piano euclideo. Rispetto ad un riferimento cartesiano $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ un'isometria $\varphi : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ si scrive, in coordinate, come

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

dove la matrice $M = (m_{ij})$ è una matrice ortogonale mentre $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ è un vettore dello spazio.
Per classificare le isometrie, in virtù della classificazione delle trasformazioni ortogonali in dimensione 3 vista nel paragrafo precedente, utilizzeremo volta per volta un riferimento adattato piuttosto che quello canonico.

Traslazioni

Se la matrice associata a f rispetto ad un riferimento è la matrice identità l'isometria è una **traslazione** in direzione del vettore β.

Simmetrie e glissosimmetrie

Se la matrice associata ad f, rispetto ad una base $\{v, u_1, u_2\}$, con u_1, u_2 invarianti e $f(v) = -v$, è

$$S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l'isometria diventa

$$\begin{cases} x' = -x + \beta_1 \\ y' = y + \beta_2 \\ z' = z + \beta_3. \end{cases}$$

I punti del piano α di equazione $x = \beta_1/2$ sono trasformati in punti dello stesso piano. Si presentano due sottocasi.

> Se $\beta_2 = \beta_3 = 0$, i punti di α sono uniti e l'isometria rappresenta la **simmetria ortogonale** rispetto al piano α.
>
> Se β_2 e β_3 non sono entrambi nulli la simmetria si può scomporre nella simmetria rispetto ad α seguita da una traslazione parallela al piano α. L'isometria prende il nome di **glissosimmetria**.

Rotazioni e rototraslazioni

Se la matrice ortogonale associata ad f, rispetto ad una base $\{u, v_1, v_2\}$ con u unica direzione invariante e $\{v_1, v_2\}$ base ortonormale di $u^\perp$, è

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \neq 0,$$

l'isometria diventa

$$\begin{cases} x' = x + \beta_1 \\ y' = y\cos\theta - z\sin\theta + \beta_2 \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta + \beta_3\,, \end{cases}$$

che rappresenta un movimento diretto. Si distinguono, in relazione ai punti uniti, i seguenti sottocasi.

Se $\beta_1 = 0$, esiste una retta r di punti uniti parallela all'asse delle x (verificare) e l'isometria è una **rotazione** attorno alla retta r.

Se $\beta_1 \neq 0$, non ci sono punti uniti e l'isometria si ottiene componendo una rotazione attorno alla retta r seguita da una traslazione parallela alla retta r. Questo tipo di isometria prende il nome di **rototraslazione**.

Rotosimmetrie

Se la matrice ortogonale associata ad f, rispetto ad una base $\{v, v_1, v_2\}$ con $f(v) = -v$ e $\{v_1, v_2\}$ base ortonormale di $v^\perp$, è

$$SR_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \neq 0,$$

l'isometria diventa

$$\begin{cases} x' = -x + \beta_1 \\ y' = y\cos\theta - z\sin\theta + \beta_2 \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta + \beta_3. \end{cases}$$

In questo caso l'isometria presenta un solo punto unito (verificare). L'isometria si può scomporre nella simmetria rispetto al piano α di equazione $x = \beta_1/2$ seguita da una rotazione attorno ad una retta perpendicolare ad α. Tale isometria prende il nome di **rotosimmetria**.

4.6 Esercizi

1. Dimostare che la composizione di due rotazioni nel piano è ancora una rotazione.

2. Dimostrare che una rotazione piana qualunque può essere scritta come composizione di due simmetrie assiali piane.

3. Fissato un sistema di riferimento cartesiano. Scrivere la simmetria piana rispetto alla retta $r: \ x - y = 0$.

4. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio. Trovare le equazioni della rotazione intorno alla retta $x - y = z = 0$.

5. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio. Scrivere le equazioni della simmetria rispetto al piano $x - y + z = 0$.

6. Scrivere le equazioni della glissosimmetria ottenuta come composizione della simmetria rispetto al piano $x-y+1 = 0$ e della traslazione di vettore $(1, 1, 1)$.

7. Scrivere le equazioni della rototraslazione ottenuta come composizione della rotazione di angolo $\pi/4$ intorno allÕasse delle z e delle traslazione di vettore $(0, 0, 2)$.

8. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio. Scrivere la rotosimmetria ottenuta come composizione della simmetria rispetto al piano $z + 1 = 0$ e della rotazione di angolo $\pi/3$ intorno all'asse delle z.

9. Sia s la simmetria di un piano α rispetto ad una retta $r \subset \alpha$. Descrivere la simmetria s in termini di una rotazione R dello spazio. Scrivere le equazioni di s e R nel caso $\alpha : \ z = 0$, e $r : \ x - y = z = 0$.

10. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio. Trovare le equazioni di un cambiamento di riferimento rispetto al quale il piano $x - y + z = 0$ coincide col piano $z = 0$.

11. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio. Trovare le equazioni di un cambiamento di riferimento rispetto al quale la retta $x - y = z = 0$ coincide con l'asse delle x.